Subespaços vetoriais

Professor: Gabriel Miranda

Resumo

Definição

Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial e $\boldsymbol{S}$ um subconjunto não-vazio de $\boldsymbol{V}$. O subconjunto $\boldsymbol{S}$ é um subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$ se:

I. $\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{S}$, tem-se: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{S}$
II. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in S$, tem-se: $\alpha \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{S}$

Ex. 1: $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^2$ e $\boldsymbol{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x\}$

Resolução:

O espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é graficamente representado pelo plano cartesiano e a reta $y = 2x$ é uma reta que pertence ao plano, portanto, graficamente falando $S \in V$, porém, isso deve ser demonstrado.

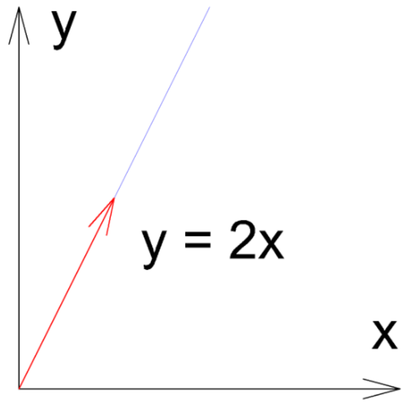

Figura 1. Representação gráfica da reta y=2x

O elemento $(0,0) \in \boldsymbol{S}$, já que $y = 2x, x = 0 \therefore y = 0$. Conclui-se então que $\boldsymbol{S}$ é um conjunto não-vazio.

Seja $\boldsymbol{u} = (x_1, 2x_1)$ e $\boldsymbol{v} = (x_2, 2x_2)$

I. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (x_1, 2x_1) + (x_2 + 2x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = \big(x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)\big)$
Como o vetor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ apresenta o mesmo formato $(x, 2x)$ é comprovado que pertence ao subespaço $\boldsymbol{S}$.

II. $\alpha \boldsymbol{u} = \alpha(x_1, 2x_1) = (\alpha x_1, \alpha 2x_1) = (\alpha x_1, 2\alpha x_1)$
Como o vetor $\alpha \boldsymbol{u}$ apresenta o mesmo formato $(x, 2x)$ é comprovado que pertence ao subespaço $\boldsymbol{S}$.

Portanto, como foram satisfeitas as duas condições é possível concluir que $\boldsymbol{S}$ é subespaço de $\boldsymbol{V}$.

Isso quer dizer que todos os vetores pertencentes a esse subespaço estão sobre a reta $y = 2x$, e que a soma de dois vetores pertencentes a esse subespaço mantém a mesma inclinação dos originais, assim como a multiplicação por um escalar.

Observação: Não é necessário demonstrar os oito axiomas para o subespaço vetorial uma vez que já foram demonstrados para o espaço vetorial, pois eles já são válidos.

Ex. 2: $\boldsymbol{V} = M(2{,}2)^* = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ e $\boldsymbol{S} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}\right\}$

* $M(2{,}2)$: Espaço das matrizes 2x2

Resolução

O elemento $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{S}$, já que $0 \in \mathbb{R}$. Conclui-se então que $\boldsymbol{S}$ é um conjunto não-vazio.

Seja $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

I. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Como o vetor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ apresenta o mesmo formato $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é comprovado que pertence ao subespaço $\boldsymbol{S}$.

II. $\alpha\boldsymbol{u} = \alpha\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Como o vetor $\alpha\boldsymbol{u}$ apresenta o mesmo formato $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$é comprovado que pertence ao subespaço $\boldsymbol{S}$.

Portanto, como foram satisfeitas as duas condições é possível concluir que $\boldsymbol{S}$ é subespaço de $\boldsymbol{V}$.

Intersecção de dois subespaços vetoriais

Sejam $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_2}$ dois subespaços vetoriais de $\boldsymbol{V}$. $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} \cap \boldsymbol{S_2}$ é o conjunto de todos os vetores $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ tais que $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{S_2}$.

Ex. 3: Seja $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{S_1} = \{(a, b, 0); a, b \in \mathbb{R}\}$ e $\boldsymbol{S_2} = \{(0{,}0, c); c \in \mathbb{R}\}$. Mostre que $S = S_1 \cap S_2$ é subespaço de $\boldsymbol{V}$**.**

Resolução

$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} \cap \boldsymbol{S_2} = \{(0{,}0{,}0)\} \in \boldsymbol{V}$

Perceba que $\boldsymbol{S}$ contém o elemento neutro da adição, por consequência $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_2}$ também, que é o único elemento que satisfaz a interseção. Isso é importante pois só pode ser definido um subespaço vetorial se ele tiver o elemento neutro da soma.

Logo, $\boldsymbol{S}$ é um subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$.

Soma de dois subespaços vetoriais

Sejam $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_2}$ dois subespaços vetoriais de $\boldsymbol{V}$. $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}$ é o conjunto de todos os vetores $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ tais que $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{S_2}$.

Teorema: $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}$ é subespaço de $\boldsymbol{V}$, ou seja, a soma de dois subespaços vetoriais de $\boldsymbol{V}$ é um subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$.

Demonstração:

I. $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2} \in \boldsymbol{S_1}; \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} \in \boldsymbol{S_1}$; pela definição de espaço vetorial
$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in \boldsymbol{S_2}; \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} \in \boldsymbol{S_2}$; pela definição de espaço vetorial

Por outro lado,

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{v_1} \in \boldsymbol{S}; \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{v_1} \in \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{v_2} \in \boldsymbol{S}; \boldsymbol{u_2} + \boldsymbol{v_2} \in \boldsymbol{S} \end{cases}$$

Logo,

$$(\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}) + (\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) = (\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{v_1}) + (\boldsymbol{u_2} + \boldsymbol{v_2}) \in (\boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}) = \boldsymbol{S}$$

II. $\boldsymbol{u_1} \in \boldsymbol{S_1}; \alpha\boldsymbol{u_1} \in \boldsymbol{S_1}$; pela definição de espaço vetorial
$\boldsymbol{v_1} \in \boldsymbol{S_2}; \alpha\boldsymbol{v_1} \in \boldsymbol{S_2}$; pela definição de espaço vetorial

Por outro lado,

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_1} \in \boldsymbol{S};\ \alpha\boldsymbol{u_1} \in \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{v_1} \in \boldsymbol{S}; \alpha\boldsymbol{v_1} \in \boldsymbol{S} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{v_1} \in \boldsymbol{S} \\ \alpha\boldsymbol{u_1} + \alpha\boldsymbol{v_1} = \alpha(\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{v_1}) \in (\boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}) = \boldsymbol{S} \end{cases}$$

Portanto $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}$ é subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$.

Soma direta de dois subespaços vetoriais

Sejam $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_2}$ dois subespaços vetoriais de $\boldsymbol{V}$. Diz-se que $\boldsymbol{V}$ é a soma direta de $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_2}$ (representada por $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S_1} \oplus \boldsymbol{S_2}$) se $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}$ e $\boldsymbol{S_1} \cap \boldsymbol{S_2} = \{\boldsymbol{0}\}$ (a interseção é o elemento neutro da adição).

Ex.4: Seja $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{S_1} = \{(a, b, 0); a, b \in \mathbb{R}\}$ e $\boldsymbol{S_2} = \{(0,0,c); c \in \mathbb{R}\}$. Mostre que $S = S_1 \cap S_2$ é subespaço de $\boldsymbol{V}$.

Resolução

$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} \cap \boldsymbol{S_2} = \{(0,0,0)\}$ elemento neutro da adição

$\boldsymbol{u} = (a, b, 0) \in \boldsymbol{S_1}; \boldsymbol{v} = (0,0, c) \in \boldsymbol{S_2}; \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (a, b, 0) + (0,0, c) = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}$

Logo, $\boldsymbol{V}$ é a soma direta de $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_2}$.